ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

MÔNG THANH HẰNG

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số 60 46 01 13

THÁI NGUYÊN, 06/2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

MÔNG THANH HẰNG

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN, 06/2017

Mục lục

Mở đầu

Các chuyên đề đa thức và lượng giác và những vấn đề liên quan là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Các học sinh thường phải đối mặt với nhiều dạng toán loại khó liên quan đến hai chuyên đề này. Các dạng toán về phương trình đa thức luôn luôn xuất hiện trong chương trình toán từ bậc THCS đến THPT...

Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán khu vực và quốc tế, Olympic sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng, các bài toán liên quan đến đa thức rất hay được đề cập và thuộc loại khó và rất khó.

Các bài toán về khảo sát phương trình và bất phương trình đa thức bằng phương pháp lượng giác là một dạng chuyên đề chọn lọc cần thiết cho giáo viên và học sinh bậc trung học phổ thông và năm đầu bậc đại học. Sử dụng lượng giác ta có thể thiết lập được nhiều đồng nhất thức đại số mới, để từ đó cho phép giải các phương trình bậc ba, bậc bốn và một số dạng phương trình đa thức bậc cao với hệ số thực một cách trực tiếp, không cần viện trợ đến số phức.

Chính vì vậy, và cũng để đáp ứng cho nhu cầu giảng dạy và học tập, tác giả chọn đề tài luận văn về "Phương pháp lượng giác giải phương trình đa thức và một số dạng toán". Đây là chuyên đề có ý nghĩa thực tiễn trong công việc giảng dạy, nó cho ta sự nhìn nhận nhất quán về các bài toán giải và biện luận phương trình đa thức và các dạng toán liên quan đến bất đẳng thức và cực trị một số lớp đa thức một biến.

Cấu trúc luận văn gồm 4 chương:

Chương 1. Một số đẳng thức lượng giác và đẳng thức đại số sinh bởi hệ thức lượng giác.

Chương 2. Phương pháp lượng giác giải phương trình bậc ba và bậc bốn.

Chương 3. Phương pháp lượng giác giải phương trình bậc cao.

Chương 4. Một số dạng toán liên quan.

Một số dạng ví dụ và bài tập được chọn lọc là các đề ra của các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic quốc tế. Một số các bài toán minh hoạ khác được trích từ các tài liệu tham khảo [1-5].

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn người thầy đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ để tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Sơn Dương, huyện Sơn Dương, tỉnh Tuyên Quang và bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, 01 tháng 05 năm 2017

Mông Thanh Hằng

Chương 1. Một số đẳng thức lượng giác và đẳng thức đại số sinh bởi hệ thức lượng giác

1.1 Một số tính chất của đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.1 (xem [3])**.** Biểu thức

$$L_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

trong đó: $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$; $|a_n| + |b_n| \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, được gọi là đa thức lượng giác bậc n (cấp n) với các hệ số a_0, a_k, b_k $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$.

Định nghĩa 1.2 (xem [3])**.** Nếu trong đa thức (1.1) tất cả các hệ số b_k $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần cos:

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \ \ (a_n \neq 0) \tag{1.2}$$

Nếu trong (1.1) tất cả các hệ số a_k $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác cấp n thuần sin:

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \ \ (b_n \neq 0). \tag{1.3}$$

Tính chất 1.1. Cho $S_n(x)$ và $S^*_m(x)$ là hai đa thức lượng giác. Khi đó:

a) $S_n(x) + S^*_m(x)$ là đa thức lượng giác bậc k với $k \leq \max\{n, m\}$.

b) $S_n(x).S^*_m(x)$ là đa thức lượng giác bậc $n + m$.

Tính chất 1.2. Với mọi đa thức lượng giác $L_n(x)$ dạng (1.1) luôn tồn tại các đa thức đại số $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ sao cho

$$L_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 1.3. Với mọi $S_n(x)$ dạng (1.3) luôn luôn tồn tại đa thức đại số $Q_{n-1}(t)$ để
$$L_n(x) = b_0 + \sin x.Q_{n-1}(\cos x).$$

Tính chất 1.4. Với mọi đa thức $C_n(x)$ dạng (1.2) ta đều có
$$C_n(x) = P_n(\cos x),$$
trong đó $P_n(t)$ là đa thức bậc n đối với t và có hệ số bậc cao nhất là $a_n 2^{n-1}$. Ngược lại, với mọi đa thức $P_n(t)$ với hệ số chính bằng 1 thì từ phép đặt ẩn phụ $t = \cos x$ ta đều biến đổi về được đa thức $C_n(x)$ dạng (1.2) với $a_n = 2^{1-n}$.

Bài toán 1.1. Cho đa thức
$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx) \ \ (k \geq 1) \tag{1.4}$$
và cho số α thoả mãn điều kiện $n\alpha = 2\pi$ với $n > k$. Chứng minh rằng
$$f(x+\alpha) + f(x+2\alpha) + \ldots + f(x+n\alpha) = na_0. \tag{1.5}$$

Lời giải.

Nhận xét rằng tổ hợp tuyến tính của các đa thức dạng (1.4) cũng là một đa thức có dạng đó. Vì vậy không mất tính tổng quát ta chỉ cần chứng minh (1.5) cho trường hợp đa thức dạng $f(x) = \sin mx$ và $f(x) = \cos mx$ là đủ. Mặt khác, ta có
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(\alpha + k\beta) = 0, \ \ \sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha + k\beta) = 0$$
đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \beta < 2\pi$ và $n\beta \,\vdots\, 2\pi$. Từ đó ta có ngay đẳng thức (1.5) là đúng.

Bài toán 1.2. Cho đa thức
$$f(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx, \ \ b_n \neq 0,$$
thoả mãn điều kiện
$$|f(x)| \leq |\sin x|, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Chứng minh rằng
$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| \leq 1. \tag{1.6}$$

Lời giải. Ta có

$$|b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + nb_n| =$$
$$= |f'(0)| = \Big|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Big| \le \lim_{x\to 0}\Big|\frac{f(x)-f(0)}{x}\Big|$$
$$= \lim_{x\to 0}\Big|\frac{f(x)}{\sin x}\Big|\Big|\frac{\sin x}{x}\Big| = \lim_{x\to 0}\Big|\frac{f(x)}{x}\Big| \le 1,$$

điều phải chứng minh.

Bài toán 1.3. Cho các số thực a, b, A, B sao cho đa thức lượng giác

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$$

thoả mãn điều kiện

$$f(x) \ge 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 \le 2,\ \ A^2 + B^2 \le 1.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{a^2+b^2} = r;\ \ \sqrt{A^2+B^2} = R$. Khi đó tồn tại α, β để

$$a = r\cos\alpha;\ \ b = r\sin\alpha,$$

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\alpha),$$
$$A = R\cos 2\beta;\ \ B = R\sin 2\beta,$$
$$A\cos 2x + B\sin 2x = R\cos 2(x-\beta).$$

Từ đó suy ra

$$f(x) = 1 - r\cos(x-\alpha) - R\cos 2(x-\beta).$$

Đặt

$$f(\alpha + \frac{\pi}{4}) = P,\ \ f(\alpha - \frac{\pi}{4}) = Q.$$

Khi đó, ta có các đẳng thức

$$P = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\Big(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\Big),$$

$$Q = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\Big(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Nếu $r^2 > 2$ thì $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} < 0$.

Trị tuyệt đối của hiệu hai góc $2(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4})$ và $2(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4})$ bằng π nên các cosin của chúng trái dấu. Bởi vậy, trong hai biểu thức

$$R\cos 2\Big(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\Big)$$

và

$$R\cos 2\Big(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\Big)$$

có một biểu thức không âm.

Từ đó dẫn đến trong hai số P và Q có một số âm. Vậy ít nhất một trong hai giá trị $f(\alpha+\frac{\pi}{4})$ và $f(\alpha-\frac{\pi}{4})$ là số âm. Điều đó là vô lý (do giả thiết $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy $r^2\leq 2$ suy ra $a^2+b^2\leq 2$.

Tương tự ta có

$$f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R\cos 0=1-r\cos(\beta-\alpha)-R;$$

$$f(\beta+\pi)=1-r\cos(\beta-\alpha+\pi)-R.$$

Nếu xảy ra trường hợp $R>1$ thì $1-R<0$ và do hiệu của 2 góc $\beta-\alpha+\pi$ và $\beta-\alpha$ bằng π nên lập luận tương tự như trên ta thu được một trong hai số $f(\beta)$ và $f(\beta+\pi)$ là số âm, vô lý.

Vậy $A^2+B^2\leq 1$, điều phải chứng minh.

Nhận xét 1.1. Bài toán trên là trường hợp đặc biệt của định lý về đa thức lượng giác nhận giá trị không âm:

Nếu đa thức

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

không âm với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$a_i^2+b_i^2\leq 2,\ \forall i\in\{1,2,\ldots,(n-1)\},\ a_n^2+b_n^2\leq 1.$$

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng với $m=2^n-1$, đa thức lượng giác

$$f(x)=\cos 2^n x+a_1\cos(2^n-1)x+a_2\cos(2^n-2)x+\ldots+a_m\cos x \quad (1.7)$$

không thể chỉ nhận giá trị cùng dấu.

Lời giải. Giả sử $f(x)$ chỉ nhận giá trị dương. Khi đó

$$f_1(x):=\frac{1}{2}(f(x)+f(x+\pi))>0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$ nên đa thức

$$f_1(x) = \cos 2^n x + a_2 \cos(2^n - 2)x + \ldots + a_{m-2} \cos 2x$$

dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó đa thức

$$f_2(x) := \frac{1}{2}(f_1(x) + f_1(x + \frac{1}{2}\pi))$$

dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tương tự như trên ta cũng thu được

$$f_2(x) = \cos 2^n x + a_4 \cos(2^n - 4)x + \ldots + a_{m-4} \cos 4x.$$

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f_2(x) + f_2\Big(x + \frac{1}{4}\pi\Big)\Big)$$

dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lặp lại quá trình trên, sau hữu hạn bước ta thu được đa thức $\cos 2^n x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều đó không xảy ra.

Nhận xét 1.2. Nếu sử dụng đặc trưng tuần hoàn của các nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ dạng (1.7) thì $F(x)$ không thể là hàm thực sự đơn điệu và do đó đạo hàm của nó (chính là $f(x)$) không thể luôn luôn cùng dấu.

Bài toán 1.5. Cho đa thức

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

trong đó các số thực $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f_n(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Chứng minh rằng

$$\frac{f_n(x) - n}{a_0} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có

$$f_n(x) \leq a_0 + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = a_0 + n. \tag{1.8}$$

Xét nguyên hàm của $f_n(x)$

$$F(x) = a_0 x + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{a_i}{i} \sin ix - \frac{b_i}{i} \cos ix\Big).$$